Второй (окружной) этап Всероссийской олимпиады школьников по физике г. Москва, 2012 г.

10 класс

1. Бег по кругу.

Мастер спорта, второразрядник и новичок бегают на лыжах по кольцевому маршруту с длиной кольца 1 км. Соревнование заключается в том, кто пробежит большее расстояние за 2 часа. Стартовали они одновременно в одном месте кольца. Каждый спортсмен бежит со своей постоянной по модулю скоростью. Новичок, бегущий не очень быстро со скоростью 4 км/час, заметил, что каждый раз, когда он проходит место старта, его обязательно обгоняют оба других спортсмена (они могут обгонять его и в других местах маршрута). Другое его наблюдение состоит в том, что когда мастер обгоняет только второразрядника, то они оба находятся от новичка на максимальном расстоянии. Сколько километров пробежал каждый из спортсменов за 2 часа? Для справки: наибольшая средняя скорость, достигнутая спортсменом на чемпионате мира по лыжным гонкам, составляет примерно 26 км/час.

Решение

Скорости спортсменов могут относиться друг к другу как целые числа

$1 : (n + 1) : (2n + 1)$, где n – целое положительное число.

То есть условию задачи удовлетворяют следующие наборы скоростей:

4 км/час : 8 км/час : 12 км/час;

4 км/час : 12 км/час : 20 км/час;

4 км/час : 16 км/час : 28 км/час,

и так далее. Разумно рассматривать только второй из этих наборов, так как для мастера спорта скорость 12 км/час маловата, а 28 км/час – великовата (превышает мировой рекорд). Но, поскольку про уровень подготовки мастера спорта в условии задачи ничего не сказано, то первый набор скоростей также годится.

Следовательно, новичок пробежал 8 км, второразрядник – 16 км или 24 км, мастер спорта – 24 км или 40 км.

2. Красавица Мальвина.

Мальвина рассматривает свое изображение в зеркале, плоскость которого вертикальна и находится на расстоянии L от носа Мальвины. Зеркало имеет две отражающие поверхности, оно укреплено на вертикальной оси, вокруг которой может вращаться. Ось вращения лежит в плоскости зеркала и также находится на расстоянии L от носа Мальвины. Буратино закрутил зеркало так, что оно приобрело начальную угловую скорость ω_0. Вследствие наличия трения угловая скорость вращения зеркала равномерно уменьшилась до нуля за время τ.

1) По какой траектории движется изображение носа Мальвины в зеркале?

2) С какой угловой скоростью движется изображение носа Мальвины в зеркале через время $\tau/2$ после начала вращения зеркала?

3) Чему равен модуль ускорения, с которым движется изображение носа Мальвины в момент времени $\tau/2$ после начала вращения зеркала?

Решение

1) Пусть зеркало повернулось вокруг оси на некоторый угол α. Если построить изображение носа Мальвины в плоском зеркале в начальный момент времени и в произвольный момент времени, то из чертежа становится очевидно, что изображение носа Мальвины движется по окружности радиусом L.

2) Если мгновенная угловая скорость зеркала равна ω, то мгновенная угловая скорость изображения носа в зеркале равна 2ω. Коэффициент «2» в формуле возникает потому, что за пол-оборота зеркала изображение совершает полный оборот. За время $\tau/2$ угловая скорость зеркала уменьшилась до величины $\omega_0/2$. Поэтому угловая скорость изображения носа в этот момент равна ω_0.

3) Линейная скорость изображения носа равна $V = 2\omega L$. Составляющая ускорения, направленная вдоль мгновенной скорости и навстречу этой скорости равна $2\omega_0 L/\tau$, поскольку линейная скорость равномерно уменьшается до нуля за время τ. Поперечная к мгновенной скорости составляющая мгновенного ускорения равна V^2/L. Таким образом, в интересующий нас момент времени, когда $\omega = \omega_0/2$, эта составляющая равна $\omega_0^2 L$. Следовательно, искомый модуль ускорения носа Мальвины равен

$$a=\sqrt{(2\omega_0 L/\tau)^2+(\omega_0^2 L)^2}=\omega_0 L\sqrt{\left(4/\tau^2\right)+\omega_0^2}\ .$$

3. Минимальная сила.

На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленькая плоская шайба. Если действовать на нее горизонтально направленной силой F, то она движется по поверхности поступательно с ускорением a. Коэффициент трения шайбы о поверхность равен μ. Действуя какой минимальной по модулю силой, можно заставить эту же шайбу двигаться поступательно по той же горизонтальной поверхности

1) равномерно;

2) с ускорением, равным по модулю $a/2$?

Решение

Понятно, что минимальная по модулю сила должна быть направлена не горизонтально. Будем решать задачу в два этапа. Сначала приложим к шайбе такую минимальную силу f, при которой шайба будет скользить по поверхности с постоянной скоростью, а затем увеличим горизонтальную составляющую этой силы так, чтобы шайба двигалась по поверхности с ускорением $a/2$.

1) Из условия задачи следует, что $ma = F - \mu mg$. Значит, масса шайбы равна: $m = F/(a + \mu g)$. Направим силу f, приложенную к шайбе, под некоторым углом β к горизонту. Найдем минимальное значение этой силы, при которой шайба будет двигаться с постоянной скоростью. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направление уравнение равномерного движения шайбы имеет вид:

$$f\cos\beta=\mu N \quad \text{и} \quad mg=F\sin\beta+N,$$

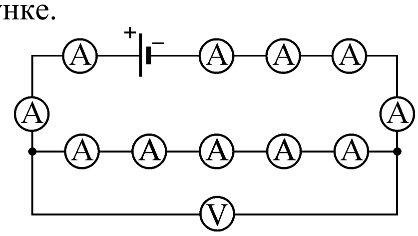
где N – сила нормальной реакции поверхности. Отсюда $f=\dfrac{\mu mg}{\cos\beta+\mu\sin\beta}$. Минимальное значение модуля силы f достигается при угле $\beta = \mathrm{arctg}(\mu)$. При этом горизонтальная составляющая силы f равна $\mu mg/(1 + \mu^2)$, а вертикальная составляющая этой силы равна $\mu^2 mg/(1 + \mu^2)$. Модуль минимальной силы, обеспечивающей равномерное движение, равен $R_2=\dfrac{\mu mg}{1+\mu^2}\sqrt{1+\mu^2}=\dfrac{\mu gF}{(a+\mu g)\sqrt{1+\mu^2}}$.

2) Для того чтобы шайба двигалась поступательно с ускорением $a/2$, нужно, чтобы горизонтальная составляющая силы была равна $\mu mg/(1 + \mu^2) + ma/2$. Подставим в полученные выражения ранее найденное значение массы шайбы. Тогда горизонтальная составляющая нужной нам минимальной силы равна $\dfrac{F}{a+\mu g}\left(\dfrac{\mu g}{1+\mu^2}+\dfrac{a}{2}\right)$, ее вертикальная составляющая равна $\dfrac{F}{a+\mu g}\cdot\dfrac{\mu^2 g}{1+\mu^2}$. Отсюда модуль искомой минимальной силы равен

$$R_1=\frac{F}{a+\mu g}\sqrt{\left(\frac{\mu g}{1+\mu^2}+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\mu^2 g}{1+\mu^2}\right)^2}\ .$$

4. Правильное подключение.

В перерыве между лабораторными работами расшалившиеся дети собрали цепочку из нескольких одинаковых амперметров и вольтметра. Из объяснений учителя дети твердо помнили, что амперметры надо включать последовательно, а вольтметры – параллельно. Поэтому собранная схема выглядела так, как показано на рисунке.



После включения источника тока, на удивление, амперметры не сгорели и даже стали что-то показывать. Некоторые показывали силу тока 2 А, а некоторые 2,2 А. Вольтметр показывал напряжение 10 В. Определите по этим данным напряжение на источнике тока, сопротивление амперметра и сопротивление вольтметра.

Решение

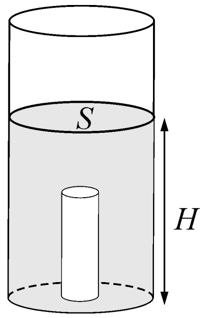
Сила тока больше в неразветвленном участке цепи, содержащем источник тока и шесть амперметров, следовательно, именно в ней амперметры показывают 2,2 А. Пять амперметров, параллельных вольтметру, показывают меньшую силу тока – 2 А. Сила тока в цепи вольтметра равна разности первых двух токов, то есть $I_V = 0{,}2$ А. Отсюда легко найти сопротивление вольтметра: $R_V = \dfrac{U_V}{I_V} = 50$ Ом.

Из соотношения сил тока в параллельных ветвях цепи следует, что сопротивление пяти амперметров в 10 раз меньше, чем сопротивление одного вольтметра, то есть $R_A = 1$ Ом.

Напряжение на источнике тока можно найти, сложив напряжения на всех амперметрах. Обозначив $I_1 = 2{,}2$ А и $I_2 = 2$ А, получаем: $U = 6I_1R_A + 5I_2R_A = 23{,}2$ В.

5. Сосулька в стакане.

Юный физик Глеб решил исследовать процесс таяния льда. К дну цилиндрического стакана он приморозил цилиндрическую сосульку и налил в стакан ледяной воды (при температуре 0 °С) так, что сосулька оказалась полностью под водой. Площадь поверхности воды в стакане $S = 10$ см^2. Глеб поставил стакан на стол в комнате и стал измерять зависимость высоты H уровня воды в стакане от времени t. Результаты измерений он аккуратно заносил в таблицу.



Но вскоре экспериментатора позвали обедать, а когда он вернулся, сосулька совсем растаяла. Глеб точно знал, что в начале эксперимента содержимое стакана находилось в тепловом равновесии и имело температуру 0 °С, а температура в комнате не изменялась. Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Сосулька за время наблюдения не всплывала. Пользуясь полученной таблицей,

1) помогите Глебу установить, через какое время после начала эксперимента произошло полное таяние льда;

2) найдите мощность притока теплоты из комнаты к содержимому стакана (то есть определите, какая энергия поступает за одну секунду к содержимому стакана через его стенки).

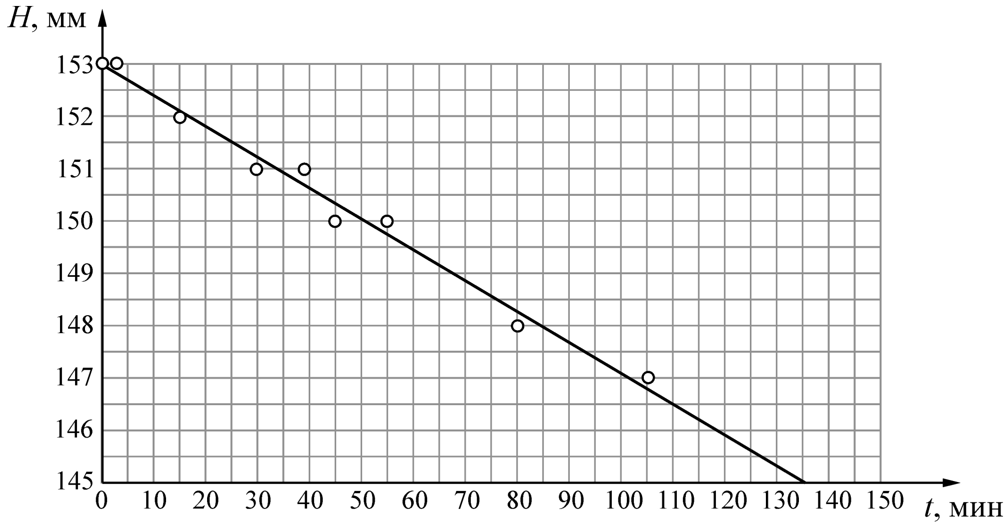
***t*, мин**	0	2	15	30	39	45	55	80	105	….	150
***H*, мм**	153	153	152	151	151	150	150	148	147	обед	145
Сосулька	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть		нет ((:

Решение

Так как стакан всё время имеет температуру 0 °С, и комнатная температура также не меняется, то постоянной будет и мощность подводимой теплоты. Докажем, что график зависимости $H(t)$ должен быть линейным.

Пусть за малое Δt системе передано количество теплоты $N\Delta t$, где N – искомая мощность подводимой теплоты. Оно целиком расходуется только на плавление льда, следовательно, за это время растает лед массой $\Delta m = \dfrac{N\Delta t}{\lambda}$. Изменение объема содержимого стакана можно найти, как разность объемов растаявшего льда и воды, полученной из этого льда: $\Delta V = \dfrac{\Delta m}{\rho_л} - \dfrac{\Delta m}{\rho}$, при этом изменение уровня воды в стакане будет равно $\Delta H = \dfrac{\Delta V}{S} = \dfrac{N\Delta t}{\lambda S}\left(\dfrac{1}{\rho_л} - \dfrac{1}{\rho}\right)$. Видно, что высота линейно уменьшается с течением времени.

1) Для ответа на первый вопрос задачи следует, пользуясь таблицей, нанести точки на график зависимости $H(t)$, провести через них прямую линию и экстраполировать полученную зависимость до пересечения с уровнем 145 мм (это уровень воды в стакане после полного таяния льда). Отсюда получим ответ – 135 минут (с точностью до 5 минут).



2) Для нахождения мощности воспользуемся выведенным соотношением $\Delta H = \dfrac{N\Delta t}{\lambda S}\left(\dfrac{1}{\rho_л} - \dfrac{1}{\rho}\right)$, из которого находим: $N = \dfrac{\Delta H \lambda S \rho_л \rho}{\Delta t(\rho - \rho_л)} \approx 2{,}93$ Вт. Здесь при подстановке взято $\Delta H = 0{,}008$ м (полное уменьшение уровня воды в стакане за время таяния льда), $\Delta t = 135$ мин.

Замечание. Вообще говоря, при таком разбросе точек на графике следует пытаться провести через них две прямые линии для того, чтобы можно было оценить погрешность найденного времени таяния льда – оно может лежать в интервале 130–140 минут. На данном этапе олимпиады авторы задачи не требуют этого от школьников во избежание излишнего усложнения решения задачи. Однако, для школьников, проделавших эту процедуру и получивших разумные оценки для погрешности, предусмотрен призовой балл.