



**Шатовская Наталья Евгеньевна**  
 Кандидат педагогических наук, учитель физики  
 ГОУ СОШ №179 Московского института  
 открытого образования.

## Приключения синодического уравнения

В статье рассматривается класс задач из раздела кинематики движения материальных точек по окружности. Применение синодического уравнения позволяет на основе одной кинематической модели рассмотреть разные ситуации, связанные с движением Земли, Луны и планет. Для иллюстрации теории и для самостоятельного решения в статью включены 15 занимательных и олимпиадных задач. Материал может использоваться как школьниками для самообразования, так и учителями для кружковых занятий.

### Что такое синодическое уравнение

Для введения читателя в курс дела рассмотрим простейшую задачу.

**Задача 1.** Как часто на циферблате встречаются часовая и минутная стрелки?

**Решение.** Приблизительно ответить на этот вопрос можно и без вычислений. Начнём наблюдать за стрелками в 12-00, когда они совпадают. Через час минутная стрелка опишет окружность и снова покажет на «12», однако часовая стрелка в этот момент будет направлена на цифру «1». Ещё через 5 минут на эту цифру будет указывать минутная стрелка, но часовая уже немного сместится. Получить точный ответ на вопрос поможет так называемое *синодическое уравнение*, которое

описывает относительное движение двух тел по окружностям вокруг общего центра в одной плоскости.

Решим задачу в общем виде. Пусть 1 и 2 – тела (материальные точки), обращающиеся по окружностям с постоянными угловыми скоростями в одной плоскости вокруг общего центра  $O$  (рис. 1). Выясним, через какие промежутки времени взаимное расположение тел 1 и 2 и точки  $O$  будет периодически повторяться.

Примем для определённости, что тела обращаются в одном направлении и тело 1 имеет большую скорость. Обозначим как  $T_1$  и  $T_2$  периоды обращений тел.

Начнём наблюдать за системой, когда оба тела находятся на одном радиусе. Угловое перемещение пер-

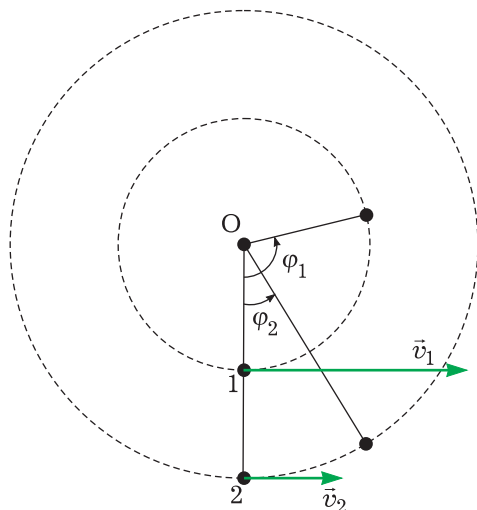


Рис. 1

вого тела линейно зависит от времени:  $\varphi_1 = \omega_1 t$ , где  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  – угло-

вая скорость этого тела. Аналогично  $\varphi_2 = \omega_2 t$  – угловое перемещение второго тела, а разность угловых перемещений тел зависит от времени как  $\varphi_1 - \varphi_2 = (\omega_1 - \omega_2)t$ . Тела снова окажутся на одном радиусе, когда первое из них обгонит второе ровно на  $2\pi$ . Обозначим необходимое для этого время как  $S$ :  $(\omega_1 - \omega_2)S = 2\pi$ . Отсюда  $2\pi/S = 2\pi/T_1 - 2\pi/T_2$  и  $1/S = 1/T_1 - 1/T_2$ . Последняя формула и есть *синодическое уравнение*, а время  $S$  (период повторения конфигураций двух тел) называют *синодическим периодом*.

Применим полученную формулу для точного решения задачи о стрелках часов. Минутная стрелка делает оборот за 1 час, а часовая за 12. Приняв  $T_1 = 1$  ч и  $T_2 = 12$  ч, получим  $S = T_1 T_2 / (T_2 - T_1) = 12/11$  часа.

### Синодическое уравнение и спутники Земли

Синодическое уравнение часто применяют в астрономии, поскольку многие небесные тела движутся по орбитам, близким к окружностям, и нередко это движение происходит приблизительно в одной плоскости. Но прежде чем перейти к конкретным примерам, сделаем ряд уточнений.

Во-первых, при выводе формулы мы приняли, что тела обращаются в одном направлении, поэтому в ней появился знак «-». Однако возможно и встречное движение тел, тогда разность угловых перемещений будет «набегать» быстрее и синодический период окажется меньше. В этом случае в формуле должен быть знак «+». Во-вторых, поскольку период  $S$  – заведомо положительная величина, то при подста-

новке числовых данных за  $T_1$  нужно принимать меньший период. В-третьих, периоды  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S$  необходимо выражать в одинаковых единицах измерения времени. (Все периоды, если не оговорено отдельно, берутся в системе отсчёта, оси координат которой направлены на удалённые звёзды.)

**Задача 2.** Искусственный спутник обращается вокруг Земли с периодом полтора часа в плоскости экватора. Как часто он пересекает меридиан наблюдателя? Запуск спутника был произведён в направлении вращения Земли.

**Решение.** Наблюдатель обращается вокруг центра Земли с запада на восток за  $T_2 = 24$  часа (приблизительно – см. задачу 9), спутник – за

$T_1 = 3/2$  часа. Как правило, спутники запускают в том же направлении – направлении вращения планеты – или под небольшим углом к нему, поскольку встречное направление энергетически невыгодно. Запишем синодическое уравнение:  $1/S = 2/3 - 1/24$  и получим ответ:  $S = 8/5$  часа, или 1 час 36 минут.

**Задача 3\***<sup>1</sup>. Предположим, сегодня Луна кульминирует (проходит самую высокую, над югом, точку суточной траектории) на меридиане наблюдателя в 23 часа

45 минут. В какое время она будет кульминировать на этом же меридиане завтра, если период её обращения вокруг Земли равен 27,32 суток?

*Примечание.* Луна обращается вокруг Земли с запада на восток, а её орбита наклонена к плоскости земного экватора незначительно (менее чем на  $30^\circ$ ). Задача аналогична предыдущей, поэтому читатель легко справится с ней самостоятельно. (Решение в конце статьи.)

## Синодическое уравнение и конфигурации планет

Классические задачи на синодическое уравнение касаются видимого движения планет. В гелиоцентрической системе Коперника планеты равномерно обращаются по окружностям вокруг общего центра – Солнца – и в одном направлении (против часовой стрелки, если смотреть из северной небесной полусферы). Чем дальше планета от Солнца, тем больше период её обращения. Наблюдения с движущейся Земли позволяют непосредственно фиксировать не сидерические, а синодические периоды других планет.

*Сидерическим* называют период обращения тела в системе отсчёта, связанной с отдалёнными звёздами, то есть время, соответствующее угловому перемещению этого тела на  $360^\circ$ . *Противостоянием* называется такая конфигурация планеты, Земли и Солнца, когда направления с Земли на планету и на Солнце противоположны. (Начальное положение тел на рис. 1 соответствует противостоянию, если

считать, что тело 1 – это Земля, а тело 2 – наблюдаемая планета.)

**Задача 4.** Сидерический период обращения Юпитера равен примерно 12 годам. Как часто повторяются противостояния Юпитера?

Нетрудно сообразить, что численное решение этой задачи такое же, что и задачи 1. Противостояния Юпитера повторяются каждые 12/11 года, или через 1 год и 33 дня. В 2010 году противостояние произошло 21 сентября (в созвездии Рыб), в 2011 году оно будет в конце октября (в созвездии Овна).

Следующие три задачи предлагаем для самостоятельного решения. Решения приведены в конце статьи.

**Задача 5.** Противостояния Марса повторяются через 780,0 суток. Определите орбитальный период Марса.

**Задача 6.** 11 января 2010 года Венера миновала верхнее соединение. Вычислите дату следующего верхнего соединения. Сидерический период Венеры составляет примерно 224,7 суток.

<sup>1</sup> Знаком \* обозначены задачи Московских астрономических олимпиад, знаком \*\* – задачи астрономических олимпиад наукоградов и научных центров.

*Указание.* Верхним соединением (или просто соединением) называется такая конфигурация планеты, Земли и Солнца, при которой направления с Земли на планету и на Солнце совпадают, и для земного наблюдателя планета находится за Солнцем.

**Задача 7\*\*.** 17 сентября 2009 года Уран находился в противостоя-

нии, а Сатурн в верхнем соединении, то есть расстояние между этими планетами было наибольшим из возможных. Через сколько лет планеты вновь окажутся на наибольшем расстоянии друг от друга? Сидерические периоды планет 84,0 и 29,5 лет соответственно.

### Синодическое уравнение и фазы Луны

Рассмотренные выше задачи о планетных конфигурациях являются классическими. Однако синодическое уравнение можно применять более широко.

**Задача 8.** Вычислите период (сидерический) обращения Луны вокруг Земли, исходя из того, что фазы Луны повторяются через 29,53 суток, а период обращения Земли вокруг Солнца составляет 365,3 суток.

Период повторения лунных фаз в астрономии называют *синодическим месяцем*, и это не случайно. Наблюдаемая с Земли фаза Луны зависит от взаимного расположения трёх тел: Солнца, Земли и Луны. Например, полнолуние наблюдается, когда направления с Земли на Луну и на Солнце противоположны (рис. 2).

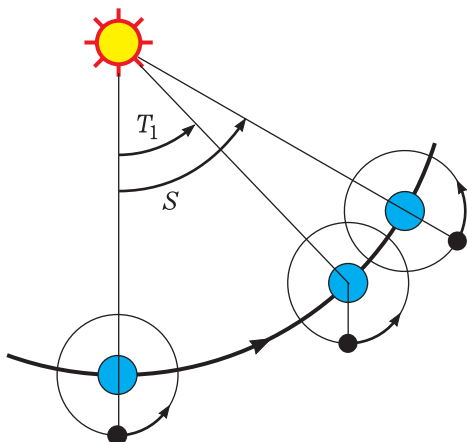


Рис. 2

**Решение.** Из рисунка видно, что период обращения Луны вокруг Земли меньше периода повторения фаз: совершив один оборот вокруг планеты, наш спутник не окажется снова напротив Солнца, поскольку за это время сама планета переместилась по орбите. Как же определить из данных сидерический период обращения Луны?

На первый взгляд кажется, что синодическое уравнение применить нельзя, поскольку движение тел происходит не вокруг одного и того же центра. Однако в задачах по кинематике следует выбирать такую систему отсчёта, в которой движение выглядит наиболее простым. Поэтому мы будем использовать геоцентрическую систему: с ней Луна обращается вокруг Земли с запада на восток с искомым периодом  $T_1$ , а Солнце обращается вокруг Земли в том же направлении с периодом  $T_2 = 365,3$  суток. Синодический месяц есть период повторения конфигураций Солнца и Луны. Синодическое уравнение выглядит так:  $1/29,53 = 1/T_1 - 1/365,3$ , откуда  $T_1 = 29,53 \cdot 365,3 / (29,53 + 365,3) = 27,32$  суток. (Это число нам уже встречалось в задаче 3.) Заметим, что в быту называют лунным месяцем 28-дневный период, который не равен ни сидерическому, ни синодическому месяцам.

### Солнечные сутки на Земле и на других планетах

Другой важный пример «нестандартного» применения синодического уравнения связан с вращением нашей планеты. Исторически в основу системы счёта времени были положены солнечные сутки – период времени от полудня до полудня на меридиане наблюдателя, то есть период повторения конфигураций Солнца и меридиана. Этот период и равен (в среднем в течение года) 24 часам. Из рис. 3 понятно, что период осевого вращения Земли (звёздные сутки) несколько меньше солнечных суток, поскольку полдень на меридиане наблюдателя наступает позже, чем планета совершит полный оборот вокруг своей оси.

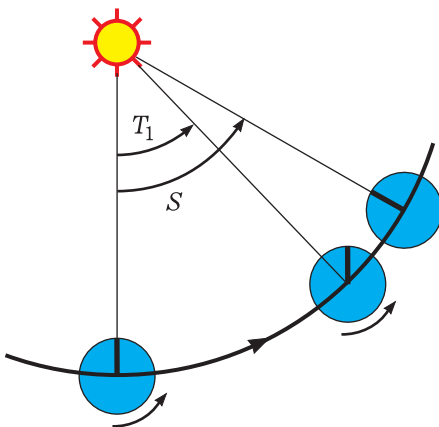


Рис. 3

**Задача 9.** Вычислите продолжительность звёздных суток Земли, если известно, что в году содержится 365,3 солнечных суток продолжительностью по 24 ч.

**Решение.** Для решения задачи снова перейдём в более удобную геоцентрическую систему отсчёта. В этой системе наблюдатель совершает один оборот вокруг земной оси с запада на восток с искомым периодом  $T_1$ , а Солнце обращается вокруг Земли в том же направлении с периодом  $T_2 = 365,3$  суток. Синодическое уравнение выглядит так:  $1 = 1/T_1 - 1/365,3$ , откуда  $T_1 = 365,3/366,3 = 0,9973$  сут. = = 23 ч 56 мин 4,1 с. Таким образом, период осевого вращения Земли примерно на 4 минуты меньше 24 часов. Это значит, что каждые последующие восход, кульминация или заход определённой звезды на меридиане наблюдателя будут происходить на 4 минуты раньше, чем предыдущие.

Понятие звёздных и солнечных суток применимо не только к Земле, но и к другим планетам.

**Задача 10.** По приведённым данным вычислите продолжительность солнечных суток на Марсе, Венере и Меркурии.

| Планета  | Период обращения, сут. | Период вращения, сут. | Направление вращения | Солнечные сутки, сут. |
|----------|------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| Марс     | 686,98                 | 1,026                 | прямое               |                       |
| Венера   | 224,70                 | 243,0                 | обратное             |                       |
| Меркурий | 87,97                  | 58,65                 | прямое               |                       |

### Задачи для самостоятельного решения

В заключение предлагаем читателю самостоятельно решить не-

сколько более сложных, но интересных задач.

11. Спутник Марса Фобос обращается в экваториальной плоскости с запада на восток с периодом 0,319 суток. Как выглядит движение спутника для наблюдателя, находящегося на экваторе Марса, если период осевого вращения планеты – 1,026 суток?

12\*. Поезд движется со скоростью 55,5 км/ч на запад вдоль параллели  $60^\circ$  с. ш. Какую продолжительность светлого времени суток зафиксирует пассажир этого поезда 21 марта? Рефракцией пренебречь.

13\*. Лунная экспедиция решила объехать Луну по экватору на луноходе, двигатели которого работают от солнечных батарей. Средняя скорость лунохода 10 км/ч. Возможно ли такое путешествие?

### Решения предложенных задач

3. Луна снова пересечёт меридиан наблюдателя через синодический период. Наблюдатель движется вокруг центра Земли по окружности с периодом 1 сутки, Луна – по близкой к окружности траектории с периодом 27,32 суток. Синодическое уравнение выглядит так:  $1/S = 1 - 1/27,32$ , откуда  $S = 27,32/26,32 = 1,038$  суток = 24 часа 55 минут. Действительно, каждый последующий день наш спутник повторяет своё видимое движение над горизонтом с опозданием примерно на час – в этом можно убедиться, произведя простейшие наблюдения.

Однако пока мы не ответили на вопрос задачи. Если Луна кульминировала сегодня в 23 часа 45 минут, то завтра на данном меридиане она кульминировать не будет, поскольку следующая кульминация произойдёт в 0 часов 40 минут послезавтра.

Радиус Луны 1737 км.

14. В системе отсчёта, связанной с неподвижными звёздами, Венера делает один оборот вокруг Солнца за 225 суток, а один оборот вокруг своей оси – за время, равное 243 суткам (осевое вращение обратное). Докажите, что в моменты наибольшего сближения с Землёй Венера обращена к ней одним и тем же полушарием.

15\*. Для изучения солнечной активности на Меркурии построили автоматическую обсерваторию. Какое максимальное время эта обсерватория может следить за солнечным пятном, если период осевого вращения Солнца составляет 25,38 суток (в средних широтах, где обычно и появляются пятна)?

5. При расчёте сидерического периода Земли следует взять с такой же точностью, с какой дан синодический период Марса, т. е. 365,3 суток. Синодическое уравнение выглядит так:  $1/780,0 = 1/365,3 - 1/T_2$ , откуда  $T_2 = 365,3 \cdot 780,0 / 780,0 - 365,3 = 687$  суток.

6. Синодический период планеты  $S = 584$  суток (с точностью до целых суток), следующее верхнее соединение Венеры будет через 1 год и 219 дней, т. е. 17 августа 2011 года.

7. Нужно вычислить период повторения взаимных конфигураций Урана и Сатурна:  $S = 45,5$  лет.

10. Солнечные сутки на Марсе равны 1,028 суток и больше звёздных всего на две с небольшим минуты. В кинематическом отношении Марс подобен Земле: вращение у него прямое, а его период значительно меньше периода обращения. Марсианский наблюдатель видел бы восход Солнца на востоке, заход – на западе и регист-

рировал бы продолжительность суток, близкую к земной.

Другое дело Венера: один оборот вокруг оси она делает за большее время, чем один оборот вокруг Солнца! Однако из-за обратного вращения планеты её солнечные сутки меньше звёздных и составляют 116,7 земных суток. Будь венерианская атмосфера прозрачна, с поверхности планеты можно было бы видеть, как Солнце очень медленно перемещается по небу с запада на восток.

Ситуация с Меркурием ещё интереснее. Из данных условия получаем значение солнечных суток на этой планете: 175,97 земных суток. Это ровно вдвое больше периода обращения и ровно втрое больше периода вращения – в таких случаях вращение называют резонансным. От восхода до захода меркурианское Солнце успевает обойти весь зодиак, и прежде чем оно взойдёт снова, все звёзды успеют взойти трижды (рис. 4)!

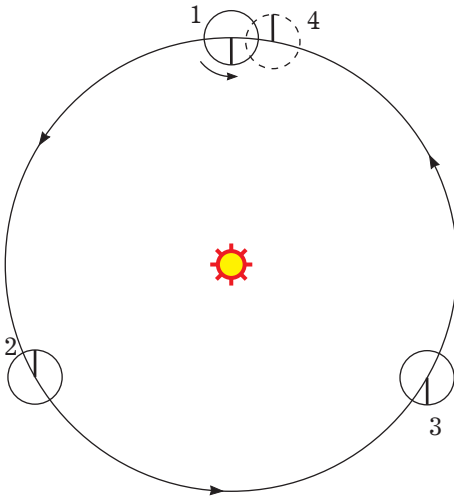


Рис. 4

11. Аналогично задаче 2 получим  $S = 0,4565$  суток = 10 часов 57 минут. Это менее половины марсианских суток, т. е. Фобос движется быстрее, чем точки экватора планеты, и

наблюдатель будет видеть, как спутник за несколько часов пересекает небесную сферу с запада на восток.

12. 21 марта – день весеннего равноденствия; если бы поезд покоился, пассажир зафиксировал бы (за вычетом рефракции) ровно 12 ч светлого времени. Однако поезд движется на запад, поэтому это время окажется больше.

Заметим, что на широте  $60^\circ$  длина градуса долготы равна как раз 55,5 км, то есть относительно поверхности планеты поезд перемещается на  $1^\circ$  в час к западу, что соответствует периоду обращения 15 суток. В этой же системе отсчёта Солнце вращается вокруг Земли с востока на запад с периодом 1 сутки. Период повторения конфигураций поезда и Солнца найдём из синодического уравнения:  $1/S = 1 - 1/15$ , откуда  $S = 15/14$  суток, или 25 часов 43 минуты. При этом над горизонтом для наблюдателя Солнце будет находиться половину этого времени, т. е. 12 часов 51 с половиной минуты.

13. Путешествие возможно, если всё время, необходимое для прохождения луноходом длины экватора, Солнце находится над горизонтом. Длина экватора Луны 10914 км; этот путь луноход пройдёт за 1091,4 часа (примерно 45,47 суток). Чтобы выиграть время, луноход следует направить на запад, в ту же сторону, в которую происходит видимое суточное движение Солнца на небе Луны; период этого движения 29,53 суток. Из синодического уравнения  $1/S = 1/29,53 - 1/45,47$  найдём период повторения конфигураций лунохода и Солнца  $S = 84,24$  суток. Половину этого времени Солнце будет над горизонтом, но 42,12 суток – это немного меньше необходимых 45,47. Таким образом, кругосвет-

ное путешествие точно по экватору Луны невозможно; исследователи должны либо повысить скорость лунохода, либо отправиться в путь по одной из более коротких параллелей.

14. Будем считать орбиты планет круговыми и лежащими в одной плоскости. Начнём наблюдать за планетами в момент нижнего соединения и отметим венерианский меридиан, обращённый к Земле. Следующее нижнее соединение произойдёт через синодический период, который мы уже определили в задаче 6: 584 дня. За это время Земля сделает 1,6 орбитальных оборота, Венера – 2,6, и линия, соединяющая планеты, повернётся на  $360^\circ \cdot 0,6 =$

$= 216^\circ$  в прямом направлении от предыдущего положения. За это же время Венера сделает  $584/243 = 2,4$  осевых оборота, и отмеченный меридиан повернётся на  $360^\circ \cdot 0,4 =$   
 $= 144^\circ$  в обратном направлении от предыдущего положения и, таким образом, снова будет обращён к Земле (рис. 5).

15. Как мы выяснили в задаче 10, солнечные сутки на Меркурии продолжаются около 176 суток, и половину этого времени Солнце находится над горизонтом. Это позволяет подолгу наблюдать за деталями поверхно-

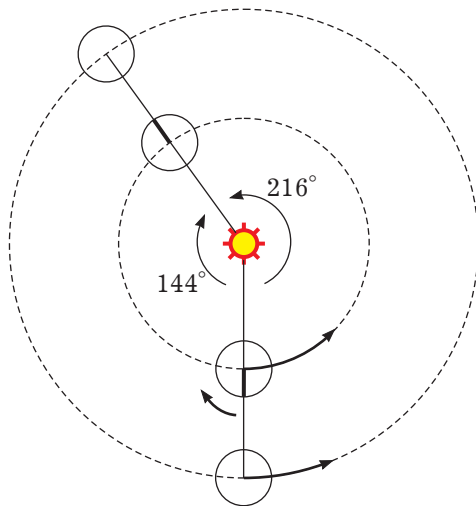


Рис. 5

сти светила, однако сама эта поверхность вращается быстрее, чем Меркурий перемещается по орбите. (Направления вращения совпадают, ведь осевое вращение Солнца и орбитальные движения планет «унаследовали» момент импульса от общего протопланетного облака.)

Период повторения конфигураций солнечного пятна и Меркурия найдём из синодического уравнения:  $1/S = 1/25,38 - 1/87,97$ ,  $S = 35,67$  суток. Для сравнения отметим, что из наземных обсерваторий удаётся наблюдать развитие солнечного пятна не более двух недель.

**Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор**

**Опасный вид профессионализма**

- Будете страховать вашу посылку? – спросил женщину служащий почтового отделения.
- Нет, – ответила она. – Там нет хрупких предметов.
- Но мы, почтовики, профессионалы и можем разбить всё что угодно!