Таблица 1

Механические величины	Электрические величины
Координата x	Заряд q
Скорость $v_x = x'$	Сила тока $i = q'$
Ускорение $a_x = v'_x$	Скорость изменения силы тока i'
Масса m	Индуктивность L
Жесткость пружины k	Величина, обратная емкости, $\frac{1}{C}$
Коэффициент трения μ	Сопротивление R
Потенциальная энергия $\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля $\frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия $\frac{mv_x^2}{2}$	Энергия магнитного поля $\frac{Li^2}{2}$

Соответствие между m и L, k и $\frac{1}{C}$ видно из сопоставления выражений для энергии.

§ 2.3. ФОРМУЛА ТОМСОНА

Перейдем теперь к количественной теории процессов в колебательном контуре.

Формула Томсона

Наша задача в первую очередь будет заключаться в определении периода (или частоты) свободных электрических колебаний. Правда, основываясь на аналогии между свободными механическими и свободными электрическими колебаниями, можно сразу записать выражения для частоты и периода свободных электрических колебаний. Действительно, так как в формуле для циклической частоты свободных колебаний шарика на пружине $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ величина k аналогична $\frac{1}{C}$, а m — индуктивности L, то частота свободных электрических колебаний должна быть равна:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.} \qquad (2.3.1)$$

Для периода свободных колебаний можно записать:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.} \qquad (2.3.2)$$

Формула (2.3.2) называется ***формулой Томсона*** в честь английского физика, который ее впервые вывел.

Полученные нами результаты правильны. Однако все же считать их достаточно строго доказанными нельзя. Необходимо показать, что уравнение, описывающее электрические колебания в контуре, в математическом отношении не отличается от уравнения, описывающего свободные механические колебания. Лишь после этого мы с полной уверенностью сможем утверждать, что механические и электрические колебания управляются одними и теми же количественными законами. А это и есть самое важное.

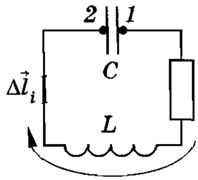
Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре

Основное уравнение для процессов в колебательном контуре можно записать, используя закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{ст}). \qquad (2.3.3)$$

Здесь $\vec{j}$ — плотность тока, γ — удельная проводимость, $\vec{E}$ — напряженность потенциального электрического поля в проводнике, созданного поверхностными зарядами, $\vec{E}_{ст}$ — напряженность поля сторонних сил. В случае колебательного контура без источников тока $\vec{E}_{ст}$ — это напряженность вихревого (непотенциального) поля.

Рассмотрим колебательный контур, содержащий все три основных элемента: конденсатор емкостью C, катушку индуктивностью L и резистор сопротивлением R (рис. 2.7). Сопротивлением катушки, пластин конденсатора и соединительных проводов пренебрежем. Весь контур между точками *1* и *2* разобьем на малые элементы $\Delta\vec{l}_i$. Положительное направление обхода контура выберем по часовой стрелке. Запишем уравнение (2.3.3) для каждого элемента и умножением обеих частей на $\dfrac{\Delta\vec{l}_i}{\gamma_i}$ приведем его к виду:



Положительное направление обхода

Рис. 2.7

$$\vec{j}\cdot\frac{\Delta\vec{l}_i}{\gamma_i} = \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{l}_i + \vec{E}_{i,\,\text{ст}}\cdot\Delta\vec{l}_i. \tag{2.3.4}$$

Теперь просуммируем уравнения (2.3.4), записанные для всех элементов $\Delta\vec{l}_i$ контура между точками *1* и *2*:

$$\sum_i \vec{j}_i\cdot\frac{\Delta\vec{l}_i}{\gamma_i} = \sum_i \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{l}_i + \sum_i \vec{E}_{i,\,\text{ст}}\cdot\Delta\vec{l}_i. \tag{2.3.5}$$

Выясним физический смысл каждого из членов уравнения (2.3.5). Рассмотрим сумму в левой части уравнения. Для всей цепи, кроме резистора, удельная проводимость бесконечна, так как мы сопротивление этой части цепи полагаем пренебрежимо малым. Далее, будем считать резистор состоящим из тонкой проволоки постоянного поперечного сечения площадью S и постоянной удельной проводимости γ. Тогда плотность тока $\vec{j}_i$ будет направлена по $\Delta\vec{l}_i$ и приблизительно постоянна по сечению. Поэтому можно принять, что

$$j_i = \frac{i}{S},$$

где i — сила тока в цепи.

При этих предположениях

$$\sum_i \vec{j}_i\cdot\frac{\Delta\vec{l}_i}{\gamma_i} = \frac{i}{S\gamma}\sum_i \Delta\vec{l}_i = i\frac{l}{S\gamma}, \tag{2.3.6}$$

где l — длина проволоки резистора.

Величина

$$\frac{l}{S\gamma} = R \qquad (2.3.7)$$

есть не что иное, как сопротивление резистора.

Рассмотрим первый член правой части уравнения (2.3.5). Он численно равен работе кулоновского поля, созданного поверхностными зарядами проводника, при перемещении единичного заряда вдоль контура от точки *1* к точке *2*, т. е. разности потенциалов (или напряжению) на конденсаторе:

$$\sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = \varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{q}{C}, \qquad (2.3.8)$$

где q — заряд правой пластины конденсатора.

Второй член правой части уравнения (2.3.5) численно равен работе сторонних сил (вихревого электрического поля) в контуре по перемещению единичного заряда, т. е. представляет собой ЭДС самоиндукции. Согласно закону электромагнитной индукции:

$$\sum_i \vec{E}_{i,\,\text{ст}} \cdot \Delta\vec{l} = \mathscr{E}_{is} = -Li'. \qquad (2.3.9)$$

Теперь силу тока выразим через производную заряда конденсатора. Здесь имеется небольшая тонкость. При выбранном направлении обхода контура сила тока, направленного от правой пластины конденсатора, положительна. Эта пластина разряжается и ее заряд уменьшается. Изменение заряда Δq за малый интервал времени Δt отрицательно. Для того чтобы сила тока была положительной величиной, ее надо определить так:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = -q'. \qquad (2.3.10)$$

Если бы вместо заряда q правой пластины мы взяли заряд левой пластины, то $i = +q'$. В нашем случае справедливо равенство (2.3.10). Окончательно уравнение (2.3.5) запишем в форме:

$$-q'R = \frac{q}{C} + Lq'',$$

или

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0. \qquad (2.3.11)$$

Это и есть основное уравнение для процессов в колебательном контуре. Оно аналогично уравнению (1.9.5) с правой частью, равной нулю. (Такое уравнение будет описывать свободные затухающие колебания.)

Строгий вывод формулы Томсона

Решение уравнения (2.3.11) в общем случае, т. е. нахождение зависимости заряда и силы тока от времени, слишком сложно. Мы ограничимся случаем, когда резистор в контуре отсутствует и членом $iR = -q'R$ можно пренебречь. Тогда уравнение (2.3.11) упрощается и его можно записать в виде

$$Lq'' = -\frac{q}{C}. \qquad (2.3.12)$$

Теперь, наконец, вы в полной мере сможете оценить те усилия, которые были затрачены для изучения колебаний груза на пружине и математического маятника. Ведь уравнение (2.3.12) ничем, кроме обозначений, не отличается от уравнения (1.2.4), описывающего колебания груза на пружине. При замене $m \to L$, $a_x = x'' \to q''$, $k \to \frac{1}{C}$ и $x \to q$ мы в точности получим уравнение (2.3.12) вместо (1.2.4).

Но уравнение (1.2.4) или эквивалентное ему уравнение (1.4.1) нами уже решено. Поэтому, зная, как колеблется груз, мы сразу можем сказать, как происходят колебания в контуре.

Разделив правую и левую части уравнения (2.3.12) на L и *введя обозначение*

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad (2.3.13)$$

будем иметь

$$q'' = -\omega_0^2 q. \qquad (2.3.14)$$

А это то же самое, что и уравнение (1.4.1). В уравнении (1.4.1) ω_0 — циклическая частота колебаний. Значит, и величина ω_0, определяемая выражением (2.3.13), тоже является частотой колебаний, но теперь уже частотой электрических колебаний (заряда, силы тока и других величин). Период свободных колебаний в контуре равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (2.3.15)$$

Это и есть формула Томсона.

Конечно, и без каких-либо уравнений мы могли бы сообразить, что период T должен увеличиваться с ростом индуктивности L и емкости C. Действительно, при увеличении L сила тока медленнее нарастает со временем и медленнее падает до нуля. А чем больше емкость, тем большее время требуется для перезарядки конденсатора. Но получить формулу (2.3.15) строго без уравнения (2.3.14) мы бы не смогли.

Гармонические колебания заряда и силы тока

Подобно тому, как координата при механических колебаниях меняется по гармоническому закону, точно также заряд конденсатора меняется по закону синуса или косинуса:

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.3.16)$$

Здесь q_m — амплитуда колебаний заряда, а φ_0 — начальная фаза колебаний. Эти величины определяются начальными условиями, т. е. значениями заряда и силы тока в начальный момент времени: $q(0) = q_0$ и $i(0) = i_0$.

Если в начальный момент времени $q(0) = q_0$, а $i(0) = 0$, то колебания совершаются по косинусоидальному закону с нулевой начальной фазой* и амплитудой $q_m = q_0$:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t. \quad (2.3.17)$$

Точно так же изменяется координата груза на пружине, если вы вывели груз из положения равновесия и не сообщили ему начальной скорости.

Сила тока также совершает гармонические колебания. Если $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, то

$$i = -q' = q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.3.18)$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ — амплитуда колебаний силы тока. Колебания силы тока смещены по фазе относительно колебаний заряда на $\frac{\pi}{2}$. При начальных условиях $q(0) = q_0$, $i(0) = 0$

$$i = I_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.3.19)$$

Колебания заряда и силы тока для этого случая графически представлены на рисунке 2.8.

---

* Именно такой случай описан в § 2.2, когда колебания в контуре начинались после замыкания цепи предварительно заряженного конденсатора.

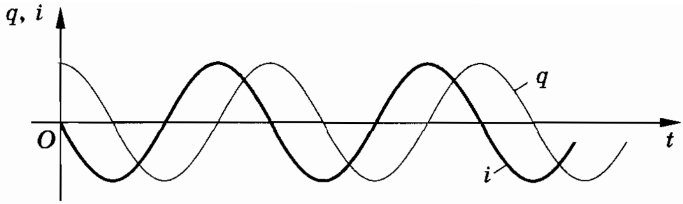


Рис. 2.8

В действительности из-за энергетических потерь колебания будут затухающими. Чем больше сопротивление R, тем больше будет период колебаний. При достаточно большом сопротивлении колебания не возникают. Конденсатор разрядится, но перезарядки не произойдет.

§ 2.4. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Свободные электромагнитные колебания в контуре быстро затухают, и поэтому их нельзя использовать на практике. Напротив, незатухающие вынужденные колебания имеют огромное практическое значение, гораздо большее, чем вынужденные механические колебания.

Переменный ток в обычной осветительной цепи квартиры, применяемый на заводах и фабриках, представляет собой вынужденные электрические колебания. Периодически меняется по гармоническому закону напряжение на концах цепи и это вызывает гармонические колебания силы тока.

Рис. 2.9

Колебания напряжения легко обнаружить с помощью осциллографа. На вертикально отклоняющие пластины осциллографа надо подать напряжение от сети. Тогда временна́я развертка колебаний будет представлять собой синусоиду (рис. 2.9). Зная скорость движения электронного луча по экрану в горизонтальном направлении (она определяется частотой «пилообразного» напряжения), можно определить частоту ко-