

§ 2.14. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач на электрические колебания рекомендуется учесть следующее. В задачах на свободные колебания в контуре, кроме формулы для периода свободных электрических колебаний (2.3.2), можно применять закон сохранения энергии.

При решении задач на расчет цепей переменного тока следует иметь в виду, что амперметры и вольтметры в этих цепях показывают действующие значения силы тока (2.5.4) и действующие значения напряжения (2.5.5). В отличие от цепей постоянного тока, обладающих только активным сопротивлением, цепи переменного тока могут иметь еще емкостное сопротивление (2.7.4) и индуктивное сопротивление (2.8.5). Полное сопротивление цепи с последовательно соединенными резистором, конденсатором и катушкой индуктивности определяется по формуле (2.9.4). Закон Ома для цепи переменного тока имеет вид (2.9.5).

При последовательном соединении потребителей в цепях переменного тока действующие или амплитудные значения напряжений складываются методом векторной диаграммы. При параллельном соединении потребителей в цепях переменного тока векторно складываются амплитуды сил токов или их действующие значения. В этом случае тоже следует строить векторные диаграммы. При построении векторных диаграмм надо хорошо знать фазовые соотношения между колебаниями силы тока и напряжения в цепях переменного тока.

Мощность вычисляется по формуле (2.10.4). Явление резонанса в электрической цепи имеет место при условии (2.11.1).

Задача 1

Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 6 \cdot 10^{-3}$ Гн и конденсатора емкостью $C = 15$ мкФ. Максимальная разность потенциалов на конденсаторе $U_m = 200$ В. Чему равна сила тока i в контуре, когда разность потенциалов на конденсаторе уменьшилась в $n = 2$ раза? Потерями энергии пренебречь.

Решение. Когда напряжение на обкладках конденсатора максимально, вся энергия контура сосредоточена в электрическом поле конденсатора (см. § 2.2.). Она равна $\frac{CU_m^2}{2}$. При уменьшении напряжения на обкладках конденсатора до значения $\frac{U_m}{n}$ энергия контура распределяется между конденсатором и катушкой. Энергия электрического поля конденсатора становится равной $\frac{C}{2} \left(\frac{U_m}{n} \right)^2$, а энергия магнитного поля катушки будет равна $\frac{Li^2}{2}$.

Согласно закону сохранения энергии имеем:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2n^2} + \frac{Li^2}{2}.$$

Отсюда

$$i = \frac{U_m}{n} \sqrt{\frac{C(n^2 - 1)}{L}} = 8,7 \text{ А.}$$

Задача 2

Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется с течением времени по закону $u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$. В момент времени $t = \frac{T}{12}$ мгновенное значение напряжения $u = 10$ В. Определите амплитуду напряжения U_m и циклическую частоту ω , если период колебаний силы тока $T = 0,01$ с. Начертите график зависимости изменения напряжения от времени.

Решение. Сначала найдем значение циклической частоты:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 628 \text{ с}^{-1}.$$

Далее записываем выражение для мгновенного значения напряжения в момент времени $t = \frac{T}{12}$:

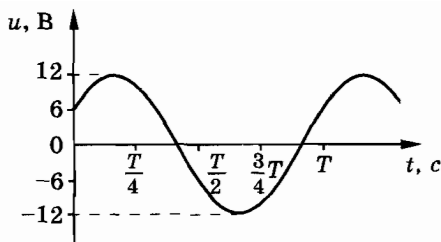


Рис. 2.33

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = U_m \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_m.$$

Отсюда

$$U_m = \frac{2u}{\sqrt{3}} \approx 12 \text{ В.}$$

График изменения напряжения в зависимости от времени представлен на рисунке 2.33.

Задача 3

В цепь переменного тока стандартной частоты ($\nu = 50$ Гц) последовательно включены резистор сопротивлением $R = 21$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0,07$ Гн и конденсатор емкостью $C = 82$ мкФ (см. рис. 2.20). Определите индуктивное, емкостное и полное сопротивления цепи, а также сдвиг фаз между силой тока и напряжением.

Решение. Индуктивное сопротивление находим по формуле (2.8.5):

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L = 22 \text{ Ом.}$$

Емкостное сопротивление вычисляется по формуле (2.7.4):

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} \approx 39 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление согласно формуле (2.9.4) равно:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 27 \text{ Ом,}$$

$$\cos \varphi_c = \frac{R}{Z} = 0,7777\dots; \varphi_c \approx 39^\circ.$$

Задача 4

К магистрали переменного тока с напряжением $U = 120$ В (U — действующее значение напряжения) через катушку (дроссель) с индуктивностью $L = 0,05$ Гн и активным сопротивлением $R = 1$ Ом подключена осветительная сеть квартиры (рис. 2.34, а). Каково напряжение U_1 на входе в квартиру, если сила потребляемого тока $I = 2$ А? Частота тока стандартная ($\nu = 50$ Гц). Индуктивностью и емкостью электрической цепи квартиры пренебречь.

Решение. Дроссель и осветительная сеть квартиры подключены к магистрали последовательно, поэтому сила тока одинакова на всех участках цепи. Напряжение U_1 и напряжение U_R на активном сопротивлении дросселя совпадают по фазе с силой тока I . Напряжение U_L на индуктивном сопротивлении дросселя опережает силу тока по фазе на $\pi/2$. Следовательно, векторная диаграмма для действующих значений напряжений и силы тока имеет вид, изображенный на рисунке 2.34, б.

~ По теореме Пифагора

$$U^2 = U_L^2 + (U_R + U_1)^2 = I^2 \omega^2 L^2 + (IR + U_1)^2.$$

Отсюда

$$U_1 = -IR \pm \sqrt{U^2 - I^2 L^2 \omega^2},$$

где $\omega = 2\pi\nu$. Так как действующее значение напряжения всегда положительно, то

$$U_1 = -IR + \sqrt{U^2 - 4\pi^2 \nu^2 I^2 L^2} \approx 114 \text{ В.}$$

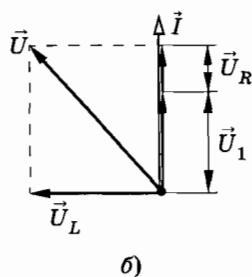
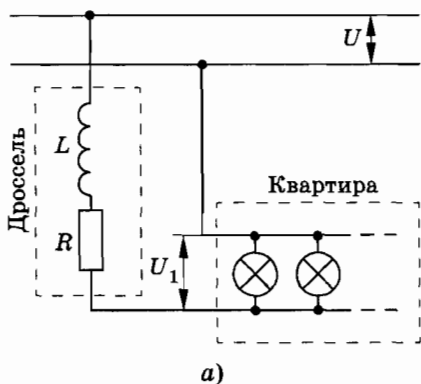


Рис. 2.34

Задача 5

В цепи (рис. 2.35) параметры R , L и C известны. Напряжение между точками A и B равно U . Постройте векторную диаграмму сил токов в данной цепи и определите силу тока в неразветвленном участке цепи. Найдите сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения. При каком условии сила тока в неразветвленном участке цепи окажется минимальной? Чему равен сдвиг фаз между силой тока и напряжением в этом случае?

Решение. В этой задаче рассматривается электрическая цепь, состоящая из двух ветвей, соединенных параллельно. Одна ветвь содержит резистор и катушку индуктивности, другая — конденсатор.

Построение векторной диаграммы начнем с вектора действующего значения напряжения \vec{U} , поскольку напряжение одинаково для обеих ветвей цепи. Направим вектор \vec{U} горизонтально вправо (рис. 2.36). Сила тока i является суммой сил токов i_1 и i_2 (см. рис. 2.35). Колебания силы тока i_1 отстают по фазе от колебаний напряжения на угол φ_1 ($\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{R}$), так как верхний участок цепи содержит катушку индуктивности.

Поэтому вектор \vec{I}_1 повернут относительно вектора \vec{U} на угол φ_1 в отрицательную сторону (по часовой стрелке). Сила тока i_2 , текущего через конденсатор, опережает по фазе напряжение на $\pi/2$. Соответствующий вектор \vec{I}_2 повернут относительно вектора \vec{U} на угол $\pi/2$ в положительную сторону (против ча-

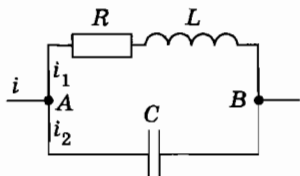


Рис. 2.35

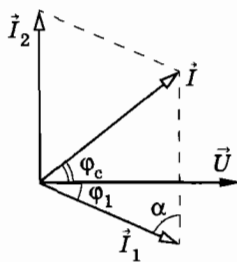


Рис. 2.36

совой стрелки). Его модуль $I_2 = \omega CU$. Действующее значение силы тока в неразветвленной части цепи находится с помощью векторной диаграммы (см. рис. 2.36):

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2.$$

Пользуясь теоремой косинусов, из векторной диаграммы определяем

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \cos \alpha.$$

Так как $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, то $\cos \alpha = \sin \varphi_1$ и

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \sin \varphi_1}.$$

Учитывая, что $I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ и $\sin \varphi_1 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$, окончательно получим:

$$I = U \sqrt{\frac{R^2 \omega^2 C^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (2.14.1)$$

Как видно из векторной диаграммы (см. рис. 2.36), вектор силы тока \vec{I} образует с вектором напряжения \vec{U} угол φ_c . Из рисунка находим

$$\cos \varphi_c = \frac{I_1 \cos \varphi_1}{I}.$$

Учитывая, что $\cos \varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$, получим

$$\cos \varphi_c = \frac{R}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)[R^2 \omega^2 C^2 + (LC\omega^2 - 1)^2]}}. \quad (2.14.2)$$

Из выражения (2.14.1) вытекает, что сила тока в неразветвленном участке цепи минимальна, если $LC\omega^2 - 1 = 0$, т. е. если $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Но $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ — это циклическая частота собственных колебаний контура, входящего в состав данной цепи. В этом случае говорят, что в цепи наступил *резонанс токов*.

При резонансе токов, как следует из формулы (2.14.2),

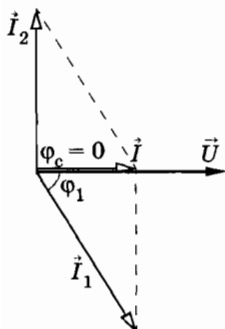


Рис. 2.37

$$\cos \varphi_c = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

При малом активном сопротивлении ($R \rightarrow 0$)

$$\cos \varphi_c = \frac{1}{\omega^2 CL} = 1.$$

Это значит, что при резонансе токов при малом активном сопротивлении сдвиг фаз между силой тока и напряжением равен нулю (рис. 2.37). Важно обратить внимание на то, что при резонансе сила тока I в неразветвленной части цепи меньше силы тока I_1 в ветви, содержащей последовательно соединенные резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L , а также меньше силы тока I_2 в ветви с конденсатором емкостью C .

Задача 6

В колебательный контур (см. рис. 2.20) включен источник переменной ЭДС $e = \mathcal{E}_m \cos \omega t$, причем амплитуда $\mathcal{E}_m = 2$ В. Определите амплитуду напряжения на конденсаторе при резонансе. Резонансная частота контура $\nu_0 = 10^5$ Гц, индуктивность катушки $L = 1$ мГн и ее активное сопротивление $R = 3$ Ом.

Решение. При резонансе амплитуда напряжения на конденсаторе, равная амплитуде напряжения на катушке U_{mL} ($U_{mC} = U_{mL}$), больше амплитуды напряжения на зажимах цепи U_m в отношении $\frac{X_L}{R}$. Если пренебречь внутренним сопротивлением источника переменной ЭДС, то $U_m = \mathcal{E}_m$. Тогда

$$\frac{U_{mC}}{\mathcal{E}_m} = \frac{2\pi\nu_0 L}{R}.$$

Отсюда

$$U_{mC} = \frac{2\pi\nu_0 L \mathcal{E}_m}{R} = 420 \text{ В.}$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

1. После зарядки конденсатора емкостью C от источника постоянного напряжения U переключатель замыкают на катушку индуктивностью L_1 (см. рис. 2.5, б). В контуре возникают гармонические колебания с амплитудой силы тока I_{m1} . Опыт повторяют по прежней схеме, заменив катушку на другую индуктивностью $L_2 = 2L_1$. Найдите амплитуду силы тока I_{m2} во втором случае.
2. Колебательный контур состоит из дросселя индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатора емкостью $C = 10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напряжения $U = 20$ В. Чему равна сила тока при разрядке конденсатора в момент, когда энергия контура оказывается распределенной поровну между электрическим и магнитным полями?
3. Определите частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из соленоида длиной $l = 15$ см, площадью поперечного сечения $S_1 = 1$ см² и плоского конденсатора с площадью пластин $S_2 = 6$ см² и расстоянием между ними $d = 0,1$ см. Число витков соленоида $N = 1000$.
4. Электрический контур состоит из конденсатора постоянной емкости и катушки, в которую может вдвигаться сердечник. Один сердечник спрессован из порошка магнитного соединения железа (феррита) и является изолятором. Другой сердечник изготовлен из меди. Как изменится частота собственных колебаний контура, если в катушку вдвинуть: а) медный сердечник; б) сердечник из феррита?
5. Для чего в телефонной трубке нужен постоянный магнит (рис. 2.38)? Почему магнитная индукция этого магнита должна быть больше максимальной индукции, создаваемой током, проходящим по обмотке катушки телефона?
6. На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подано напряжение $u_1 = U_{m1} \cos \omega t$, а на горизонтально отклоняющие — напряжение $u_2 = U_{m2} \cos (\omega t - \varphi)$. Какую тра-

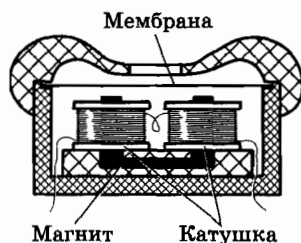
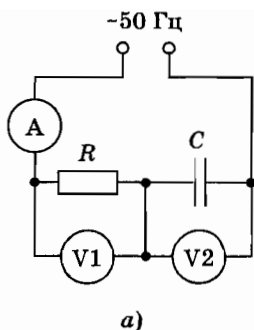


Рис. 2.38

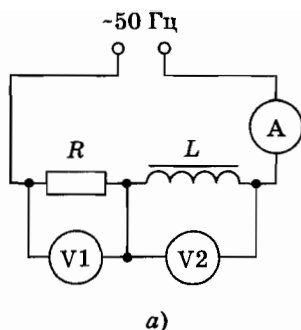
екторию опишет электронный луч на экране осциллографа, если разность фаз между напряжениями на пластинах равна: а) $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; б) $\varphi_2 = \pi$?

7. Кипятильник работает от сети переменного тока с напряжением $U = 120 \text{ В}^*$. При температуре $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ спираль имеет сопротивление $R_1 = 25 \text{ Ом}$. Температурный коэффициент сопротивления материала спирали $\alpha = 2 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$. Определите массу воды, после закипания превратившейся в пар за время $\tau = 1 \text{ мин}$. Удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$.
8. При включении катушки в сеть переменного тока с напряжением 120 В и частотой 50 Гц сила тока в ней равна 4 А . При включении той же катушки в сеть постоянного тока с напряжением 50 В сила тока в катушке оказывается равной 5 А . Определите индуктивность катушки.
9. Определите сдвиг фаз между силой тока и напряжением в электрической цепи, если генератор отдает в цепь мощность $P = 8 \text{ кВт}$, амплитуда силы тока в цепи $I_m = 100 \text{ А}$ и амплитуда напряжения на зажимах генератора $U_m = 200 \text{ В}$.
10. В сеть стандартной частоты с напряжением 100 В последовательно включены резистор сопротивлением 150 Ом и конденсатор емкостью 16 мкФ . Найдите полное сопротивление цепи, силу тока в ней, напряжения на зажимах резистора и конденсатора и сдвиг фаз между силой тока и напряжением.
11. Каковы показания приборов в цепях, представленных схемами на рисунке 2.39, а, б? Напряжение сети $U = 250 \text{ В}$, $R = 120 \text{ Ом}$, $C = 20 \text{ мкФ}$. Постройте для обеих схем векторные диаграммы.
12. В сеть переменного тока стандартной частоты с напряжением 210 В включены последовательно резистор сопротивлением 40 Ом и катушка индуктивностью $0,2 \text{ Гн}$. Определите силу тока в цепи и сдвиг фаз между силой тока и напряжением. Конденсатор какой емкости надо включить последовательно в цепь, чтобы сдвиг фаз оказался равным нулю? Какой будет сила тока в цепи в этом случае?

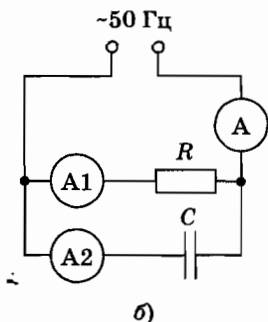
* В этой и последующих задачах даются действующие значения напряжения и силы тока.



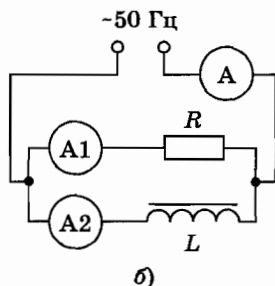
a)



a)



б)



б)

Рис. 2.39

Рис. 2.40

13. Каковы показания приборов в цепях, схемы которых изображены на рисунке 2.40, а, б? Напряжение сети $U = 119$ В, активное сопротивление $R = 8$ Ом, индуктивность $L = 0,048$ Гн. Постройте для схемы, изображенной на рисунке 2.40, б, векторную диаграмму.
14. Найдите показания приборов в цепи, схема которой представлена на рисунке 2.41. Напряжение на зажимах цепи $U = 216$ В, $R = 21$ Ом, $L = 70$ мГн, $C = 82$ мкФ. Частота стандартная. Постройте векторную диаграмму сил токов.
15. Электродвигатель мощностью $P = 10$ кВт присоединен к сети с напряжением $U = 240$ В, $\cos \varphi_1 = 0,6$, частота $\nu = 50$ Гц. Вычислите емкость конденсатора, который нужно подключить параллельно двигателю для того, чтобы коэффициент мощности установки повысить до значения $\cos \varphi_2 = 0,9$.
16. В цепи, схема которой изображена на рисунке 2.42, $R = 56$ Ом, $C = 106$ мкФ и $L = 159$ мГн. Активное сопротивление катушки мало. Частота тока в сети $\nu = 50$ Гц. Опреде-

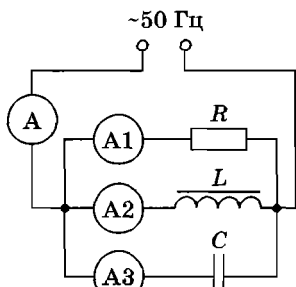


Рис. 2.41

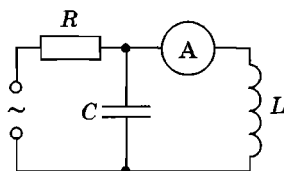


Рис. 2.42

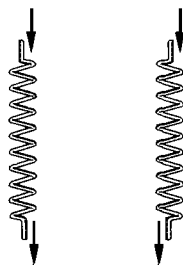


Рис. 2.43

лите напряжение в сети U , если амперметр показывает 2,4 А. Постройте векторную диаграмму.

17. В катушке индуктивности сила тока линейно увеличивается

со скоростью $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 10$ А/с. Найдите ЭДС индукции, возникающую при этом в катушке, если резонансная частота колебательного контура с этой катушкой и конденсатором емкостью $C = 100$ пФ равна $\nu = 100$ кГц.

18. Резонанс в колебательном контуре с конденсатором емкостью $C_1 = 1$ мкФ наступает при частоте $\nu_1 = 400$ Гц. Когда параллельно конденсатору C_1 подключают другой конденсатор емкостью C_2 , то резонансная частота становится равной $\nu_2 = 100$ Гц. Определите емкость C_2 . Активным сопротивлением контура пренебречь.

19. На рисунке 2.43 изображены два соленоида, каждый из которых может быть использован в ламповом генераторе в качестве катушки обратной связи. В один и тот же момент в обеих катушках ток течет сверху вниз. Однако при включении одной катушки генератор работает, а при включении другой — нет. Почему?

20. Конец пружины опущен в ванночку со ртутью (рис. 2.44). Что произойдет, если замкнуть ключ и пропустить через пружину достаточно сильный ток?

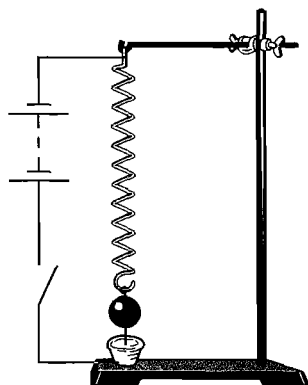


Рис. 2.44